

# A ADAPTAÇÃO DAS TAREFAS MATEMÁTICAS: COMO PROMOVER O USO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES<sup>1</sup>

Ana Patrícia Gafanhoto  
*Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre*  
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro  
*Universidade de Évora & Unidade de Investigação do IE/UL*  
apc@uevora.pt

**Resumo:** O presente texto tem como objetivo discutir de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas pelo professor promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções. As tarefas caracterizam-se por serem diversificadas no seu contexto (puramente matemático ou relacionado com a realidade) e por se estruturarem de modo a (1) apelarem à familiarização com uma dada representação inicial, (2) pedirem explicitamente a transição entre diversas representações; e (3) requerem a livre escolha de uma ou mais representações para responder a questões de exploração. O estudo desenvolveu-se a partir da análise das representações utilizadas por alunos de 9.º ano na resolução de seis tarefas adaptadas, no domínio das funções, recorrendo ao Geogebra. Em cada tarefa, independentemente do seu contexto, os alunos foram capazes de obter e utilizar todas as representações das funções, conforme solicitado nas questões de transição. Nas questões de exploração, recorreram de forma eficaz às representações já criadas e, em alguns casos, conciliaram algumas delas para produzir as respostas. Assim, o contexto das tarefas não parece ter sido determinante no uso das representações pelos alunos, mas a sua estrutura revelou-se especialmente adequada, de onde se sublinha a importância da adaptação criteriosa das tarefas pelo professor, nomeadamente quando recorre ao computador.

**Palavras-chave:** Adaptação de tarefas matemáticas; representações múltiplas; ensino das funções; Geogebra.

## Introdução

A valorização e quase exclusividade da representação algébrica no estudo da álgebra, associada à execução de procedimentos desprovidos de significado, contribuiu para os problemas de aprendizagem de muitos alunos nas últimas décadas (Ponte, 2006).

As orientações curriculares para a Matemática têm vindo a reclamar uma abordagem distinta da Álgebra, em particular das funções, em que as diversas representações sejam exploradas de forma integrada e aproveitando as mais-valias de cada uma. O uso das representações verbal, numérica, tabular, gráfica e algébrica, tem o potencial de tornar a aprendizagem da Álgebra significativa e eficaz (Friedlander & Tabach, 2001; Brown & Mehilos, 2010).

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) refere especificamente, na sua norma para a representação (6.º ao 8.º ano), que os alunos conseguirão ser melhores

---

<sup>1</sup> Trabalho realizado no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008.

resolvedores de problemas algébricos se conseguirem mover-se com facilidade entre os diversos tipos de representações:

(...) é comum os alunos começarem a trabalhar com tabelas de dados numéricos para investigarem o padrão associado a uma função linear; porém, também deverão aprender a representar esses dados sob a forma de gráfico, ou equação, quando pretendem determinar a relação linear geral. Os alunos deverão, ainda, adquirir flexibilidade na identificação de formas equivalentes de equações e expressões lineares. Essa flexibilidade poderá surgir à medida que os alunos forem adquirindo prática com as múltiplas formas de representação de um problema de contexto (p.334).

O uso de representações múltiplas de funções no ensino e aprendizagem da Matemática encontra um aliado no computador, cuja utilização didática é atualmente viável na maioria das salas de aula de Matemática (Laborde, 2008; NCTM, 2007). É diverso o *software* que permite aos alunos obterem gráficos ou tabelas com extensas listas de valores preenchidos ou usarem a expressão algébrica de uma função para obterem um determinado ponto (x,y) do seu gráfico (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007).

Porém, não é expectável que os alunos adquiram de forma autónoma a competência de lidar com as diversas representações das funções. O professor tem um importante papel a desempenhar para ajudar o aluno a usar de forma fluente e eficaz estas representações, para o que muito contribuem as experiências de aprendizagem que proporciona aos alunos. Estas experiências, embora se substanciem no trabalho realizado na sala de aula, estão diretamente relacionadas com as tarefas matemáticas que o professor adota para trabalhar com os alunos (Ponte, 2005). A seleção de tarefas adequadas é um aspeto decisivo da prática do professor que deve ser balizado pelos seus objetivos e perspectivado em função da existência de *software* potente (Laborde, 2008). O uso deste software no ensino, como os ambientes de geometria dinâmica (AGDs), desafia não só a abordagem matemática aos conhecimentos, mas também a dinâmica com que podem ser abordados, permitindo aos alunos uma grande autonomia na aprendizagem.

Este texto foca-se precisamente na adaptação de tarefas matemáticas a adotar com vista a promover o uso de diversas representações das funções por parte dos alunos. O seu objetivo é discutir de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

### **Representações múltiplas com tecnologia: A adaptação de tarefas**

Uma das mais importantes decisões que o professor realiza regularmente na sua atividade de ensino incide sobre as tarefas que propõe na aula. É em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos. A centralidade das tarefas é reconhecida por inúmeros autores e o NCTM dedica-lhe especial atenção, defendendo que devem ser escolhidas em função do conteúdo matemático, dos alunos a quem se dirigem e do potencial de aprendizagem que contêm (NCTM, 1991/1994).

Para muitos professores, a escolha das propostas de trabalho que colocam aos alunos é diretamente influenciada pelos manuais escolares e outros mediadores curriculares acessíveis, em especial na Internet (APM, 1998; Laborde, 2008). No entanto, nem sempre estes recursos se adequam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores. A seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores (Almiro, 2005).

Na escolha de uma tarefa, é importante que o professor tenha presente diversas dimensões que a definem. Ponte (2005) elege quatro dimensões importantes: o grau de estruturação, o

grau de desafio matemático, a relação com a realidade e a duração da realização. A variação das duas primeiras dimensões dá origem a diferentes tipos de tarefa, entre as quais se evidenciam os problemas, os exercícios, as investigações, e as explorações (Ponte, 2005).

O contexto da tarefa pode ser diversificado e tem como pólos as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. Quando são propostas tarefas cujo contexto é real, é importante que as situações sejam apresentadas de modo realista e sem artificialidade, e mobilizem o conhecimento prévio dos alunos (NCTM, 2007). No entanto, há que cuidar que o contexto não seja um fator que dificulte a realização da tarefa devido ao desconhecimento deste; nestas situações, o professor deve familiarizar os alunos com esse contexto (Ponte *et al.*, 2007).

Um outro aspeto relevante na caracterização das tarefas tem a ver com a(s) representação(ões) matemáticas a que apelam (Goldin & Shteingold, 2001). Hoje em dia, e assumindo que os alunos têm acesso à tecnologia que facilita e potencia o que conseguem fazer em Matemática, muitas das questões relacionadas com representações normalmente incluídas em exercícios perdem a sua pertinência (Laborde, 2008). Isto é particularmente visível no trabalho com funções. Enquanto que há uns anos a obtenção de um gráfico de uma função constituía um desafio que podia ocupar toda uma aula de 12º ano, hoje em dia o mesmo gráfico é obtido automaticamente em reduzidos segundos.

O tema das funções é especialmente adequado a concretizar as atuais orientações internacionais e nacionais de proporcionar aos alunos o contacto com a diversidade de representações matemáticas. As representações são elementos essenciais na compreensão de conceitos e das relações matemáticas; na comunicação de abordagens, de argumentos e de conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (Goldin & Shteingold, 2001). Há portanto a necessidade de criar oportunidades de os alunos contactarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, de passarem informação de uma forma de representação para outra e estabelecerem relações entre diferentes ideias matemáticas (NCTM, 2007). O professor deve procurar proporcionar aos seus alunos o trabalho com cada uma das representações e a sua análise e comparação, de modo a conhecerem os seus pontos fortes e fracos. Uma estratégia é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações, em que as desvantagens de umas possam facilmente ser colmatadas pela combinação com as outras (Kaput, 1992).

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro formas de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Estes autores identificam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação:

- a) representação verbal – está normalmente associada à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados obtidos, dando ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.
- b) representação numérica – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da Álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.
- c) representação gráfica – proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, a representação gráfica é muito influenciada por fatores externos (por

exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

d) representação algébrica – esta é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, e por vezes é a única ferramenta para justificar ou efetuar generalizações. Contudo, esta forma de representação que usa exclusivamente símbolos algébricos, pode ocultar o significado matemático e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Brown e Mehilos (2010) fazem referência a uma outra forma de representação das funções, a tabular, concretizada por tabelas de duas colunas, nas quais se relacionam diretamente as variáveis independente  $x$  e a dependente  $y$  através da concretização numérica de pares  $x$  e  $y$ . Estas tabelas, quando preenchidas num número significativo de pares, auxiliam os alunos a identificar as relações entre as variáveis, encontrar regularidades e a expressá-las de forma mais abstrata. A tabela atua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra, onde as variáveis não são concretizadas e expressam relações gerais.

Ao definir as tarefas para a aula, o professor tem a oportunidade de incentivar a utilização de várias representações. O uso de diferentes representações para apresentar e explorar a “situação-problema” em que se baseia uma tarefa, estimula a flexibilidade na escolha das representações para resolver essa tarefa e proporciona segurança para o seu uso posterior pelos alunos. Para além disso, quando os alunos têm presente as diferentes representações na compreensão da “situação-problema”, a transição de uma representação para outra é encarada como uma necessidade natural em vez de uma exigência arbitrária (Friedland & Tabach, 2001).

Numa tarefa em que é apresentada a “situação-problema” seguida de questões que guiam o aluno na sua investigação, há incentivo, segundo Friedland e Tabach (2001), ao uso de múltiplas representações se as questões, sequenciais, tiverem os seguintes propósitos:

1. *Familiarização com a representação inicial*: questão pede aos alunos que analisem a representação inicial, podendo até realizar algumas extrapolações ou aventar estimativas de respostas;
2. *Transição entre representações*: questão pede aos alunos que trabalhem especificamente com representações diferentes da inicial;
3. *Exploração de representações*: questão mais complexa e aberta pede aos alunos que optem pela forma de representação que considerarem mais adequada para a obtenção de uma solução para o problema.

O professor pode e deve recorrer a ambientes tecnologicamente suportados como contexto de exploração das tarefas que exigem ou beneficiam do uso de múltiplas representações. O uso das tecnologias é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados (Ponte *et al*, 2007).

O recurso a computadores com *software* acessível que permite obter as diversas representações das funções é uma estratégia que o professor deve encarar, pois esta melhora as oportunidades de aprendizagem dos alunos que podem tirar o maior proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente, como a construção de gráficos (NCTM, 2007). Os ambientes de geometria dinâmica facilitam a execução de ações relativas à resolução da tarefa, ampliam a sua exploração e análise, abrem novas oportunidades para produzir respostas e, ainda em alguns casos, revelam-se como a única estratégia de obter uma resposta (Laborde, 2008).

Entre estes destaca-se o Geogebra, acessível de forma livre às escolas e aos alunos, com interface em português, e com potencialidades na múltipla representação de funções, incluindo a gráfica (representação gráfica de função em referencial cartesiano), a algébrica (escrita ou visualização da expressão algébrica da função), a tabular (mais ou menos completa e sobre domínio delimitado), e a numérica (coordenadas de pontos ou cálculo através da tabela) (Gafanhoto, 2011).

### **Metodologia**

O estudo relativo a este texto acontece no contexto de uma investigação mais alargada (Gafanhoto, 2011). Nessa investigação foi realizada uma intervenção didática na qual, de forma intencional, se adaptaram/criaram tarefas que foram implementadas na turma de uma professora, com vista a compreender o uso das representações matemáticas por alunos do 9.º ano, com o recurso do Geogebra. Essas tarefas, em número de seis, foram adaptadas segundo critérios discutidos pelas duas autoras deste texto, considerando as indicações da professora titular da turma no que respeita às necessidades dos alunos e à integração coerente na planificação global da turma. A primeira autora deste texto teve ainda um papel determinante na planificação das aulas de implementação das tarefas, feita em parceria com a professora titular. Nestas aulas foi adotado um modelo de breve apresentação da tarefa pela professora titular, seguida de um extenso período de trabalho autónomo dos alunos em pequeno grupo com recurso a um computador por grupo, e finalizado com uma breve discussão coletiva conduzida pela professora titular com a colaboração da investigadora primeira autora. Assim, durante a implementação das tarefas, a investigadora primeira autora assumiu uma postura de observadora participante, quer no apoio aos alunos durante o trabalho de grupo, quer na discussão coletiva das tarefas. A recolha de dados consistiu na observação e análise documental, tendo-se realizado o registo dos acontecimentos da aula e a análise dos documentos produzidos pelos alunos, quer as resoluções escritas das tarefas, quer os ficheiros Geogebra respetivos.

No estudo a que diz respeito este texto, recorreremos essencialmente à análise documental. Começámos por realizar uma análise das seis tarefas então adotadas, segundo o contexto em que se inserem e segundo a sua estrutura e propósito das questões. De seguida, recorreremos à análise das representações matemáticas produzidas pelos alunos em resposta às tarefas, sintetizada por Gafanhoto e Canavarro (2011). Numa fase seguinte, fizemos, para cada tarefa, uma análise da utilização das representações matemáticas pelos alunos. Concluímos com a análise transversal da utilização das representações matemáticas pelos alunos em resposta às questões das tarefas, com vista a identificar regularidades e aspetos de diferença ou detalhe que nos permitam responder ao objetivo deste texto, ou seja, de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

### **Análise das tarefas**

As tarefas utilizadas foram criteriosamente escolhidas. Considerámos importante escolher tarefas que fossem realizáveis em uma aula, que fossem abertas e permitissem aos alunos a realização de um trabalho significativo (natureza problemática) e que diversificassem o seu contexto. Pareceu importante considerar tarefas com e sem contexto real por se ter a expectativa de que isso poderia influenciar o tipo de uso que os alunos fariam das representações. No quadro 1 apresentam-se as tarefas e sua classificação relativa ao contexto:

Quadro 1 - Tarefas e seu contexto

TAREFA	CONTEXTO		REFERÊNCIA
	MATEMÁTICA	REALIDADE	
1. Qual o tarifário melhor? Eis a questão...		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
2. As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$ ...	X		Adaptado de manuais escolares
3. Matemática por um canudo		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
4. As folhas de papel que usamos		X	Criado pela primeira investigadora
5. Estudo das funções $y=ax^2$	X		Adaptado de exercícios de manuais
6. O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

As tarefas que se contextualizam na realidade apresentam situações diversificadas: escolha de tarifários de telemóvel; relação entre o comprimento e a largura das folhas de papel A4; análise do crescimento do cabelo; e o espaço visualizado através de canudos de diferentes comprimentos. Nas tarefas de contexto matemático foram estudadas famílias de funções (afim e quadrática).

A adaptação das tarefas para o estudo envolveu a criação de uma estrutura comum e a adoção de questões com vista à utilização e à interação das diferentes representações das funções à exceção da verbal, considerada menos relevante para alunos do 3.º ciclo. Nestas tarefas pode identificar-se uma estruturação em três partes distintas, inspirada em Friedland e Tabach (2001):

- 1) Familiarização: constituída pelo enunciado escrito (ou ficheiro Geogebra) que apresenta a situação-problema recorrendo a uma dada representação e, eventualmente, alguma questão de interpretação;
- 2) Transição: constituída por questões que proporcionam a criação de todas representações possíveis. A ordem pela qual são solicitadas as diversas representações varia de modo a que alunos efetuem diferentes transições entre representações;
- 3) Exploração: constituída por questões mais abertas em que, para responder, os alunos podem optar pelas representações que considerem mais adequadas. Este tipo de questões envolve diferentes pedidos matemáticos, como identificar a imagem dado o objeto, identificar o objeto dada a imagem, estabelecer comparações entre funções ou, ainda, estudar a influência da variação dos parâmetros. Foi também pedido aos alunos que explicitassem as representações usadas para responder a este tipo de questões.

Na adaptação das tarefas foi também tido em conta o facto de se querer utilizar como recurso o Geogebra. Algumas das questões foram formuladas tendo em conta a sua presença, remetendo os alunos para a sua utilização.

Neste texto exemplificamos a análise recorrendo a duas das seis tarefas, “Qual o tarifário melhor? Eis a questão...” (tarefa 1) e “As informações dadas pelas funções do tipo  $y=mx+b$ ” (tarefa 2), as quais se distinguem no que diz respeito ao contexto.

A tarefa “Qual o tarifário melhor? Eis a questão” teve por base a tarefa “Tou xim?” que consta no livro *Funções no 3.º Ciclo com tecnologia* (Grupo T3, 2002). A tarefa original sofreu adaptações tendo sido alterada a situação-problema com a consideração de três tarifários

reais de telemóvel, de operadoras distintas, com os quais os alunos lidam no seu quotidiano, tendo-se assim procurado criar uma situação mais próxima da realidade, minimizando artificialismos.

A tarefa “As informações dadas pelas funções do tipo  $y=mx+b$ ” é adaptada de manuais escolares e com ela pretendeu-se que os alunos estudassem as propriedades das funções afim, num contexto puramente matemático, recorrendo à variação dos parâmetros  $m$  e  $b$  e à observação do efeitos dessa variação para cada um dos parâmetros.

Quanto à estruturação das tarefas, elas organizam-se como se ilustra nos quadros 2 e 3.

Quadro 2- Apresentação e categorização das questões da tarefa

Quest. familiarização

Questões de transição

**TAREFA 1:**Qual o tarifário melhor? ...

O Pedro possui três telemóveis, porque efectua chamadas para todas as redes móveis. Em cada um dos telemóveis tem um tarifário diferente, como apresentado em seguida:

Telemóvel	Operadora	Tarifário	Preço	
1	Vodafone	Best Total Base	Mensalidade	Preço/min.
			15,27 €	0,153
2	TMN	+Perto	0,609 cênt /min	
3	Optimus	Total	0,00403 €/seg	

1. Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome *Tarefa 1*.

2. Completa as seguintes tabelas, na folha de cálculo do *Geogebra*:

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 1

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 2

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 3

- Para cada um dos tarifários escreve uma expressão algébrica que permita determinar o valor a pagar para qualquer duração de chamadas.
- Num referencial cartesiano, faz um esboço dos gráficos que representam cada um dos tarifários.
- Representa, na zona gráfica do *Geogebra*, os pontos referentes a cada um dos tarifários.

1-Selecciona os dados referentes a cada um dos tarifários → 2- Clica com o botão direito do rato  
→ 3- Selecciona a opção “Criar lista de pontos”

- Usando o comando *RegressãoLinear* traça o gráfico que representa cada um dos tarifários (Exemplo: *RegressãoLinear[lista1]*). Compara cada uma das expressões algébricas associadas a cada um dos gráficos com as que tu definiste na pergunta 2.

## Questões de exploração

7. Analisa cada um dos tarifários, apresentando sempre uma justificação para as tuas respostas e indicando também a qual ou a quais das representações (tabela, expressão algébrica ou gráfico) recorreste para dar resposta:
- Tendo em conta que o Pedro, mensalmente, fala cerca de 120 minutos, qual dos tarifários é que o Pedro deverá escolher de forma a pagar menos?
  - Se o Pedro só quiser gastar 25 euros, mensalmente, de entre os tarifários da Vodafone e da TMN, qual deverá escolher?
  - Existirá algum momento em que o tarifário da Vodafone seja o mais vantajoso?
  - Se o Pedro pagasse não mensalmente, mas por chamada, qual dos tarifários seria o mais vantajoso?
  - Se o Pedro quisesse ficar só com um telemóvel com qual dos telemóveis deveria ficar, na tua opinião?

Quadro 3 - Apresentação e categorização das questões da tarefa 2

## TAREFA 2: Uma função do tipo $y=mx+b...$

Quest  
famil.

Questões de  
transição

Questões de exploração

1. Abre o ficheiro Parâmetro das funções.ggb.

(e movimenta os selectores de modo a observares a representação gráfica)

2. Considera a função que tem como expressão algébrica:  $y=3x+2$

a) Representa-a graficamente, através da manipulação dos seletores m e b

b) O seletor "AbcissaA" permite fazer o registo na folha de cálculo de vários pontos pertencentes à função, activando a opção "enviar traço para a folha de cálculo".

c) Completa a seguinte tabela:

		$-\frac{2}{3}$		1	2
	-4		2		

3. Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação de qual foi a(s) representação a que recorreste para dar a resposta.

a) Qual é a imagem do objeto 10? E de -6?

b) Qual é o objeto que tem com imagem -10? E 17?

c) Existe mais do que um objeto com a mesma imagem?

d) Em que valores é que a função intersecta o eixo das abcissas e o das ordenadas?

e) A função é crescente ou decrescente? Justifica a resposta.

f) Recorrendo ao seletor m, indica para que valores de m é que a função é crescente, decrescente e constante?

g) Qual a influência do parâmetro b numa função do tipo  $y=mx+b$ .

## Análise das respostas dos grupos às tarefas

Apresentamos uma análise das resoluções das duas tarefas selecionadas que revela como os grupos de alunos usaram as representações das funções na resposta quer às questões de transição, quer às questões de exploração.

**Tarefa 1: Qual o tarifário melhor? ...**

Esta tarefa requereu dos alunos bastante interpretação do enunciado, sendo a familiarização com a situação-problema resultado da discussão na turma entre os alunos e a professora. Não



foi nesta fase utilizada nenhuma representação específica das funções, a não ser a representação verbal, de forma implícita, na exemplificação de como funcionava cada um dos tarifários.

Nas questões de transição, todos os grupos efetuaram a sua representação na forma de tabela e, posteriormente, efetuaram a transição entre a representação tabular e a algébrica e a tabular e a gráfica, como solicitado. Destaca-se aqui a transição entre a representação tabular e a algébrica, enfatizando a importância do uso do Geogebra. Para criarem a representação tabular, os alunos recorreram à folha de cálculo do Geogebra, usando as referências das células como se ilustra na figura 1. Este processo mostrou ser uma mais-valia para a posterior obtenção da expressão algébrica, pois quando comparadas as expressões que os alunos utilizaram para a obtenção da representação tabular e as expressões algébricas, verifica-se semelhanças entre elas, tendo os alunos procedido unicamente à substituição das referências das células pela variável  $x$  (fig. 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	tim							
3	duração	preço	duração	preço	duração	preço		
4	1	15.423	1	0.609	1	0.2418		
5	2	15.576	2	1.22	2	0.4836		
6	3	15.729	3	1.83	3	0.7		Número F4: 0.00403 * 60 A4
7	4	15.882	4	2.44	4	0.9672		
8	5	16.035	5	3.05	5	1.209		Número D6: 0.81 A6
9	120	33.63	120	73.2	120	29.016		
10								Número B8: 15.27 + 0.153 A8

Figura 3- Processo utilizado pelo grupo 2 para preenchimento das tabelas

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	15,423	15,576	15,729	15,882	16,035

Tabela 1

$15,27 + 0,153 \times x$

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,609	1,218	1,827	2,436	3,045

Tabela 2

$0,609 \times x$

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,2418	0,4836	0,7254	0,9672	1,209

Tabela 3

$0,00403 \times 60 \times x$

Figura 4 - Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 2

No que diz respeito às questões de exploração, o quadro 4 resume as representações utilizadas pelos grupos:

Quadro 4 - Representações usadas na resolução das questões de exploração da tarefa 1

	QUESTÕES DE EXPLORAÇÃO	GRUPOS					Repres. Predominante
		1	2	3	4	5	
TAREFA 1	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/Tabular	Gráfica	Gráfica

Verifica-se que os grupos recorreram a múltiplas representações para a obtenção das suas respostas.

As resoluções apresentadas à pergunta 7 a) são exemplo da forma como os alunos responderam quando se pretendia que determinassem a imagem dado o objeto. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação algébrica (fig. 3) principalmente quando eram solicitadas as imagens de objetos fora da janela representada:

	A	B	C	D	E
1					
2	tlm 1				
3	Duração	preço			
4	0	15.27			
5	1	15.423			
6	2	15.576			
7	3	15.729			
8	4	15.882			
9	5	16.035			
10	120	33.63			
11	tlm 2				
12	duração	preço	Número B10: 15.27 + 0.153 A10		
13	0	0			
14	1	0.609			
15	2	1.218			
16	3	1.827			
17	4	2.436			
18	5	3.045			
19	120	73.08			
20	tlm 3				
21	Duração	preço	Número B19: 0.609 A19		
22	0	0			
23	1	0.2418			
24	2	0.4836			
25	3	0.7254			
26	4	0.9672			
27	5	1.209			
28	120	29.016			
29			Número B28: 0.2418 A28		
30					

Figura 5 - Processo usado pelos grupos para determinar o custo de 120 minutos em chamadas

As resoluções apresentadas para a questão 7 b) são também ilustrativas da forma geral como os alunos resolveram as questões em que se pretendia determinar o objeto dada a imagem. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por ser a forma mais imediata e fácil, evitando assim cálculos e procedimentos de manipulação e substituição de variáveis em que os alunos, por norma, manifestam pouco à-vontade. Na discussão coletiva, os alunos referiram estratégias usadas (fig. 4):

**Jorge (grupo 2):** Procurámos os 25 euros no eixo dos yy.

**Marta (grupo 5):** Traçava uma reta horizontal.

**Mafalda (grupo 3):** Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a reta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus.

Figura 4 - Resposta apresentada por diferentes grupos

Nesta tarefa foi também colocada uma questão em que se solicitava a comparação de funções, 7c), tendo os grupos respondido, preferencialmente, com recurso à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por esta forma de representação dar uma imagem geral e imediata das funções em estudo, como se pode ver no seguinte exemplo (fig. 5):

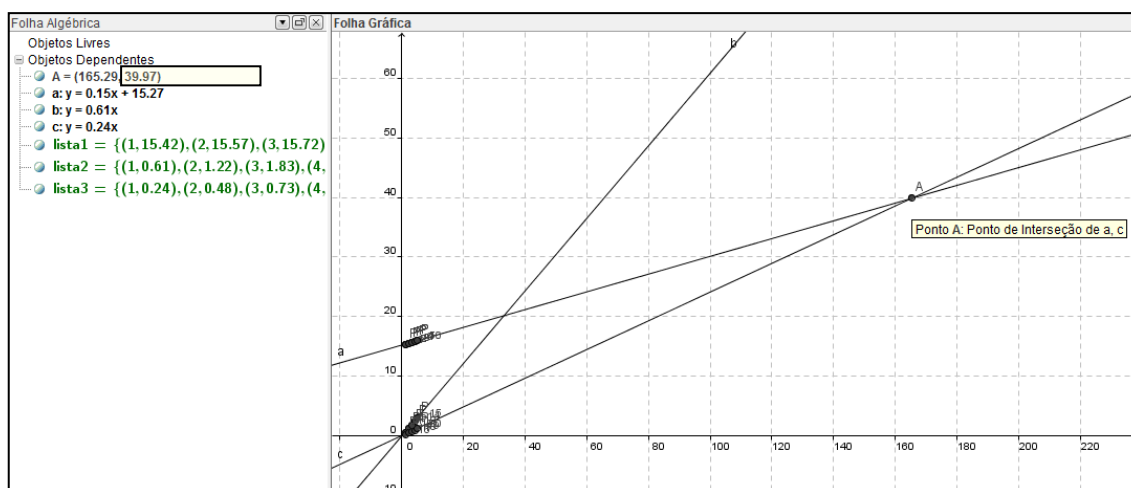


Figura 6 - Processo usado pelo grupo 3

Os alunos procederam à análise da representação gráfica, tendo incluído ainda o ponto de interseção para determinarem os valores para as variáveis em estudo, conseguindo desta forma obter uma resposta no contexto do problema (fig. 6):

166 minutos. Para o tarifário da Vodafone ser mais vantajoso ter de pagar 166 minutos. (Recorremos ao gráfico).

Figura 7 - Resposta apresentada pelo grupo 3

### Tarefa 2: Uma função do tipo $y=mx+b$ ...

Nesta tarefa é dada a expressão algébrica de uma função afim. A familiarização com esta representação faz-se pela identificação pelos alunos dos parâmetros  $m$  e  $b$  da função para que, com recurso a seletores relativos a esses parâmetros criados no Geogebra, os alunos construam a representação gráfica da função em estudo. Assim, os grupos efetuaram a transição entre a representação algébrica e a gráfica. Posteriormente, solicitou-se a representação tabular, tendo os alunos conciliado as duas formas de representação que já possuíam (fig. 7):

Para completarmos a tabela utilizamos o selector da Abscissa  $A^*$ , e para determinarmos o valor de  $2$  recorremos a folha de cálculo, fazendo  $=3 \times (-\frac{2}{3}) + 2$ .  
\* depois movimentávamos e verificávamos na zona Algébrica,

Figura 8 - Resposta do grupo 1

Esta estratégia permitiu-lhes então o preenchimento da seguinte tabela (fig. 8):

$x$	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
$y$	-4	0	2	5	8

Figura 9 - Tabela preenchida pelo grupo 1

Para determinar a imagem, os grupos sentiram a necessidade de conciliar a representação gráfica com a algébrica de forma a ultrapassar a limitação apresentada pela representação gráfica no que diz respeito ao rigor e exatidão.

Nas resoluções das questões de exploração, os alunos usaram múltiplas representações (quadro 5):

Quadro 5 - Representações usadas pelos grupos na resolução das questões de exploração da tarefa 2

QUESTÕES DE EXPLORAÇÃO			GRUPOS					Repres. Predominante
			1	2	3	4	5	
TAREFA 2	3	a)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica
		b)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		f)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		g)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

O estudo da influência da variação dos parâmetros assumiu grande relevo. Na resolução das questões os alunos recorreram preferencialmente à representação gráfica, fazendo uso dos seletores definidos, como se pode confirmar nas respostas dos grupos (fig. 9 e fig. 10):

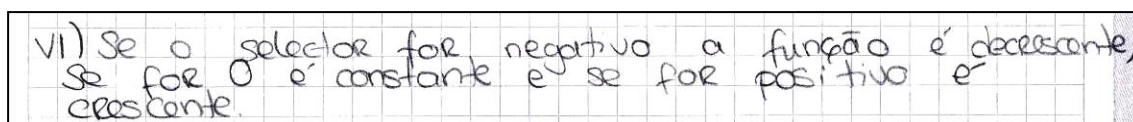


Figura 9 – Resposta apresentada pelo grupo 4 no estudo da influência do parâmetro m

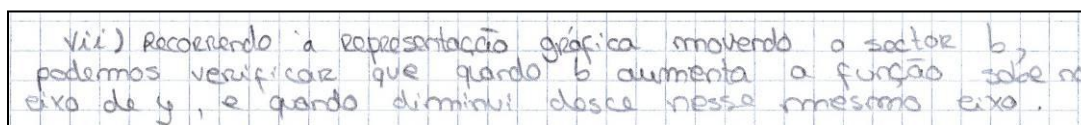


Figura 10 - Resposta apresentada pelo grupo 5 no estudo da influência do parâmetro b

No que diz respeito ao uso do Geogebra, os alunos assumem que o seu uso foi uma mais-valia, destacando a facilidade, rapidez e rigor que permite nas representações (fig. 11):

**Rui (grupo 4):** (...) porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão.

**Bárbara (grupo 3):** É mais rápido porque não temos que estar a representar um a um e é mais rigoroso.

Figura 11 - Resposta apresentada por diversos grupos

## Conclusão

As tarefas apresentadas neste texto foram adaptadas na expectativa de promoverem o uso flexível e eficaz de representações por parte dos alunos, tendo sido especialmente pensada a sua estrutura e os tipos de questões propostas aos alunos, bem como diversificado o seu contexto.

Nas questões de transição, os alunos efetuaram a transição entre quaisquer representações recorrendo às que já tinham construído antes. As transições mais frequentes foram entre a representação tabular e a algébrica e entre a gráfica e a tabular. Nesta última, os alunos tiraram partido duma funcionalidade do Geogebra que consiste na definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo para a construção automática da tabela.

Nas questões de exploração, os alunos fizeram uso maioritário da representação gráfica, mas todas as outras representações foram usadas em algumas situações. A representação tabular foi essencialmente usada na análise da relação entre as variáveis e no estudo das funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas. A representação gráfica foi usada para responder às questões em que era solicitado o estudo comparativo de funções ou no estudo da influência da variação dos parâmetros, uma vez que esta forma de representação dá uma imagem clara e global das funções, mas não pormenorizada. A representação algébrica foi usada quando era solicitada a determinação da imagem dado o objeto, dispondo já da expressão algébrica, criada pelos próprios alunos ou não. Os grupos conseguiram sempre apontar qual ou quais as representações que usaram e isso poderá ter contribuído para tomarem consciência das potencialidades de cada uma.

Assim, podemos afirmar que a estrutura adotada para estas tarefas foi bem sucedida na promoção da utilização flexível e eficaz de representações múltiplas de funções por parte dos alunos, que revelaram capacidade de adotar representações adequadas e de conciliá-las de forma pertinente, tirando partido das vantagens de umas para suprir desvantagens de outras (Friedland & Tabach, 2001). Esta constatação é comum a todas as tarefas analisadas, quer com contexto de realidade ou puramente matemático.

Por fim importa sublinhar a importância do recurso ao Geogebra que foi decisivo no trabalho autónomo dos grupos. Este foi considerado pelos alunos como uma mais-valia na obtenção das diferentes representações, que lhe reconheceram facilidade, rapidez e rigor. Além disso, o Geogebra permitiu-lhes a simultaneidade de visualização no mesmo ecrã das diferentes representações, tornando mais direto o estabelecimento de conexões entre estas. Possibilitou ainda aos alunos formas criativas de lidar com as representações, com a transição entre elas e com a sua conciliação. Isto revela o desafio do *software* para lidar de novas formas com os conceitos e procedimentos matemáticos (Laborde, 2008).

Assim, este estudo vem reforçar a importância do papel do professor na adoção de tarefas criteriosamente pensadas para o ensino da Matemática, apoiadas por recursos que potenciem o seu desenvolvimento pelos alunos. A escolha de uma tarefa para a sala de aula é um aspeto decisivo da prática do professor e deve merecer por parte deste uma grande atenção. A identificação de tarefas que parecem interessante é um passo importante, mas é necessário perspetivar a sua utilização com os alunos em função dos propósitos matemáticos do ensino. Este estudo mostra como determinadas tarefas podem servir de inspiração ao professor, nomeadamente no que diz respeito à consideração do contexto e da situação-problema, mas beneficiam de um trabalho cuidadoso de adaptação das questões originais, na sua sequência e conteúdo.

### Referências bibliográficas

- Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular*(pp. 275-316). Lisboa: APM.
- APM (1998). Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: APM.
- Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(9), 532-538.
- Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics*(pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

- Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica (Geogebra)*. Lisboa: APM.
- Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2011). Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. In Nunes, C., Henriques, A. C., Caseiro, A., Silvestre, A. I., Pinto, H., Jacinto, H. , Ponte, J. P. (Orgs.), *Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM (Edição digital)
- Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 36-50). Lisboa: SEM-SPCE.
- ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In Frank K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the NCTM* (Vol. II, pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.